

VI CONGRESO IBÉRICO de AgroIngeniería

5 a 7 de Septiembre | 2011
Universidade de Évora | Portugal



Empleo de métodos numéricos para el ajuste de los coeficientes de difusividad (D) y convectivo de transferencia de masa (h_m) en el secado de alimentos

Arranz, F.J.¹, Correa, E.C.², Jiménez H.T.², Diezma, B.², García-Hierro, J.³, Robla, J.I.³, Barreiro, P.².

¹ GSC-UPM. ETSI Agrónomos de Madrid. España. fj.arranz@upm.es

² LPF_TAGRALIA-UPM. ETSI Agrónomos de Madrid. España.

³ LTAS-CENIM-CSIC. Instituto de investigaciones metalúrgicas. Madrid. España.

Resumen

Los modelos matemáticos de transferencia de humedad desde el alimento al medio circundante durante el proceso de secado dependen de dos parámetros: coeficiente de difusividad efectiva D y coeficiente convectivo de transferencia de masa h_m , cuya determinación experimental se basa en la consideración de un sistema difusivo sencillo de solución analítica bien conocida. Para el caso, que aquí nos ocupa, de difusión monodimensional en una lámina infinita de grosor $2l$, la solución analítica de la ley de Fick se puede expresar en términos de una serie infinita función de, entre otros parámetros, μ_n que representa las raíces positivas de la ecuación $\mu_n \cdot \tan \mu_n = h_m l / D$. La evaluación de dicha serie infinita exige determinar el valor de las raíces μ_n . Frente a procedimientos obsoletos, que sin embargo se siguen empleando en la actualidad, basados en aproximaciones que fueron útiles cuando no se poseía capacidad computacional para el cálculo numérico de raíces de ecuaciones trascendentes, este trabajo propone el cálculo directo de estas raíces empleando técnicas estándar del Análisis Numérico. Se establece así mismo el procedimiento matemáticamente más adecuado para el cálculo directo de D y h_m realizando un ajuste por mínimos cuadrados a la aproximación lineal de la solución analítica (primer término de la serie infinita).

Palabras Clave: número de Biot, número de Fourier, cálculo de raíces trascendentes.

The mathematical models representing the mechanism of mass transport phenomena during drying are strongly dependent on parameters h_m and D , which represent the convective mass transfer and moisture diffusion coefficients of the food product. Both of them can be determined from experimental drying characteristic curve of food product, by application of the thin-layer drying equations. The most common is the solution of Fick's law for, in this study, an infinite plate with thickness $2l$ (one-dimensional problem). The well known analytical solution to this problem is an infinite series dependent, between others, on μ_n , where μ_n represents the positive roots of the equation $\mu_n \cdot \tan \mu_n = h_m l / D$. The calculation of roots μ_n is required to evaluate that infinite series. It is generally observed, that at present time, the researchers most often use solver methods based on obsolete approaches to the roots estimation, developed when the possibility to use computational systems was scarce (from the sixties). This work proposes the direct calculation of these roots making use of standard techniques of numerical analysis. It establishes the optimal mathematical procedure to obtain accurate solutions to the values of D and h_m , by using the least squares curve fitting method to the linear approach of the first term of the series of the analytical solution.

Key words: Biot number, Fourier number, determination of roots of transcendental equations.

1. INTRODUCCIÓN

El empleo de secaderos solares está aumentando, especialmente en países en vías de desarrollo y con elevada radiación solar, apareciendo cómo una alternativa real al secado al aire libre debido a los bajos o nulos costes operacionales puesto que no necesita consumir combustible o energía eléctrica para realizar el calentamiento del aire de secado. Sin embargo, estos equipos presentan un claro inconveniente frente a los secaderos industriales convencionales, su dependencia de las condiciones climáticas y alternancias diarias y estacionales definen unas condiciones variables de temperatura y humedad relativa del aire de secado disminuyendo la capacidad de control de la operación por parte del operador (Chen et al., 2005). El desarrollo de nuevas técnicas de sensórica inteligente que combinan sensórica de bajo coste con redes de sensores inalámbricas y con métodos eficientes de modelado y simulación, pueden facilitar la monitorización y control de operaciones como las de secado solar de alimentos sujetas a perturbaciones y cambios súbitos en las condiciones de producción que dificultan la toma de decisiones y automatización del proceso (Son et al., 2009; Spencer Jr et al., 2004). Para construir un sensor basado en modelos es necesario que el sensor adquiera capacidades inteligentes mediante la incorporación de modelos que permitan calcular a partir de las magnitudes físicas medidas directamente por el sensor (por ejemplo, la humedad relativa y temperatura del aire) otras magnitudes de interés que caracterizan el proceso de secado, como la velocidad de secado, contenido en humedad del alimento en cada instante de secado, etc.

Los modelos matemáticos de transferencia de humedad desde el alimento al medio circundante durante el proceso de secado dependen de dos parámetros que son función, entre otras, de las características estructurales y geométricas del alimento: coeficiente de difusividad efectiva D y coeficiente convectivo de transferencia de masa h_m en la interfase alimento-aire. Según Tripathy (Tripathy and Kumar, 2009) el principal reto en la actualidad es obtener valores precisos de D y h_m , pudiéndose constatar en general que la mayoría de los investigadores utilizan los datos publicados disponibles de D y h_m debido a la escasez de información relevante sobre los mismos (Tripathy and Kumar, 2008). La bibliografía indica que los métodos numéricos como los métodos de diferencias finitas y elementos finitos se han empleado normalmente en la resolución de modelos matemáticos complejos que consideran simultáneamente los fenómenos de transferencia de calor y masa, mientras que lo más habitual es que para problemas más sencillos, que consideran distintas simplificaciones, se empleen modelos analíticos para la determinación de estos parámetros (Tripathy and Kumar, 2009). Así, para una determinada geometría (lámina infinita, cilindro infinito, esfera) la determinación experimental de los coeficientes D y h_m se considerará un sistema difusivo sencillo cuya solución analítica es bien conocida.

Para el caso que aquí nos ocupa, el problema de difusión monodimensional en una lámina infinita de grosor $2l$, la solución analítica de la ley de Fick se puede expresar, como se muestra más adelante, en términos de la siguiente serie infinita de magnitudes adimensionales

$$\bar{\Phi}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_n}{\mu_n (\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo), \quad (1)$$

donde $\bar{\Phi}$ es la humedad adimensional relativa promediada en el espacio, Fo es el *número de Fourier* o tiempo adimensional, y μ_n son las raíces positivas de la ecuación $\mu_n \cdot \tan \mu_n = h_m l / D$, siendo $Bi = h_m l / D$ el denominado *número de Biot*.

La evaluación de esta expresión exige determinar el valor de las raíces μ_n , siendo de especial interés la primera de ellas μ_1 , que se emplea en la aproximación a un término utilizada para calcular D y h_m a partir de una curva de secado, para lo cual se sigue haciendo uso de (ver Tripathy et al, 2008 y 2009) expresiones aproximadas poco eficientes basadas en relaciones con el número de Biot que datan de los años 60 (Luikov, 1968; Pflug and Blaisdell, 1963), cuando no existía capacidad computacional que permitiera realizar el ajuste numérico directo de las raíces μ_n , y por lo tanto de los coeficientes D y h_m .

El objetivo de este trabajo es presentar una metodología de ajuste numérico para la resolución de las ecuaciones trascendentes que permita la determinación directa de los parámetros D y h_m , los cuales se emplearán en el desarrollo de modelos dinámicos robustos para simulación y control del secado solar de alimentos.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Para la determinación experimental de los coeficientes D y h_m se considerará, cómo ya se ha indicado, la difusión monodimensional en una lámina infinita. Esto supone que el producto a secar deberá ser cortado en láminas cuyo grosor sea mucho menor que las otras dos dimensiones espaciales.

Sea entonces una lámina infinita homogénea de grosor $2l$ centrada en el origen de coordenadas $x=0$, es decir definida en el intervalo $-l < x < +l$, inmersa en un medio externo controlado a temperatura y humedad constantes, cuya distribución inicial de humedad es uniforme e igual a M_0 . La ecuación de difusión aplicable será entonces

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \quad (2)$$

con la condición inicial

$$M(x, t = 0) = M_0, \quad (3)$$

y condiciones de contorno

$$\begin{aligned} D \frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \text{ y} \\ -D \frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{x=l} &= h_m (M_l - M_{eq}), \end{aligned} \quad (4)$$

para la pseudofrontera en $x=0$ y la superficie en contacto con el medio circundante en $x=+l$, respectivamente. Aquí $M_l = M(x=l, t)$ es la humedad en la superficie de la lámina, y M_{eq} es la humedad de equilibrio con el medio externo que en principio será directamente proporcional a la humedad relativa H_R de éste, es decir $M_{eq} = M_{sat} \cdot H_R$.

Como es bien conocido ((Luikov, 1968), la solución analítica a este problema se puede expresar en términos de la expansión infinita

$$\frac{M(x, t) - M_{eq}}{M_0 - M_{eq}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} \mu_n}{\mu_n + \operatorname{sen} \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{l}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{D \cdot t}{l^2}\right), \quad (5)$$

donde μ_n son las raíces positivas, en orden creciente, de la ecuación

$$\mu_n \tan \mu_n = \frac{h_m l}{D}. \quad (6)$$

Se suele expresar esta solución en términos de magnitudes adimensionales, de modo que se obtiene la siguiente ecuación de carácter genérico

$$\Phi(\tilde{x}, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} \mu_n}{\mu_n + \operatorname{sen} \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n \cdot \tilde{x}) \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo), \quad (7)$$

donde $\Phi = M - M_{\text{eq}} / M_0 - M_{\text{eq}}$ es la humedad adimensional, $\tilde{x} = x/l$ la distancia adimensional, y $Fo = Dt/l^2$ el *número de Fourier* que hace el papel de variable dinámica o tiempo adimensional. Se define además el *número de Biot* $Bi = h_m l / D$ el cual determina, como se desprende de su definición, la predominancia relativa del proceso de difusión ($Bi \rightarrow 0$) o la del proceso de transferencia convectiva ($Bi \rightarrow \infty$). Obsérvese que el número de Biot está implícitamente incluido en las raíces μ_n que ahora quedan definidas por la ecuación $\mu_n \tan \mu_n = Bi$. Nótese que estas raíces están acotadas por las correspondientes asíntotas verticales que aparecen en la función $f(\mu) = \mu \tan \mu - Bi$ para $\mu = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$, de modo que resulta sencillo implementar un método numérico de búsqueda de raíces, ya que sabemos que $0 < \mu_1 < \pi/2, \pi/2 < \mu_2 < 3\pi/2, 3\pi/2 < \mu_3 < 5\pi/2$, etc.

Experimentalmente resulta mucho más sencillo medir la humedad de toda la muestra, es decir su promedio espacial, que medir la distribución espacial de la humedad dentro de la muestra. El promedio espacial $\bar{M}(t)$ de la distribución espacio-temporal de humedad $M(x,t)$ viene definido por

$$\bar{M}(t) = \frac{1}{l} \int_0^l M(x,t) dx, \quad (8)$$

que aplicado a la ecuación 7 nos proporciona la siguiente expresión para la humedad adimensional promediada espacialmente

$$\bar{\Phi}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \mu_n}{\mu_n (\mu_n + \operatorname{sen} \mu_n \cos \mu_n)} \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo). \quad (9)$$

La serie infinita de la ecuación 9 posee una convergencia monótona, de modo que cada término de la serie es menor que el anterior, y para Fo suficientemente grandes, o Bi suficientemente pequeños, empleando únicamente el primer término de la serie se obtiene una aproximación muy buena al valor exacto de $\bar{\Phi}$. La Figura 1 ilustra este comportamiento de la serie, donde se ha considerado como valor exacto el obtenido tomando 100 términos de la serie. Esta propiedad permite realizar un ajuste por mínimos cuadrados de los datos de un experimento de secado, humedades y tiempos, al primer término de la serie infinita. Tomando logaritmos se tiene

$$\log \frac{\bar{M}(t) - M_{\text{eq}}}{M_0 - M_{\text{eq}}} = \log \frac{2 \operatorname{sen}^2 \mu_1}{\mu_1 (\mu_1 + \operatorname{sen} \mu_1 \cos \mu_1)} - \mu_1^2 \frac{D}{l^2} \cdot t, \quad (10)$$

de modo que, ajustando los datos experimentales a una recta $y = a - b \cdot t$, donde $y = \log(\bar{M} - M_{\text{eq}} / M_0 - M_{\text{eq}})$, del valor obtenido de la ordenada en el origen a se calcula la raíz μ_1 conforme a

$$a = \log \frac{2 \operatorname{sen}^2 \mu_1}{\mu_1 (\mu_1 + \operatorname{sen} \mu_1 \cos \mu_1)}. \quad (11)$$

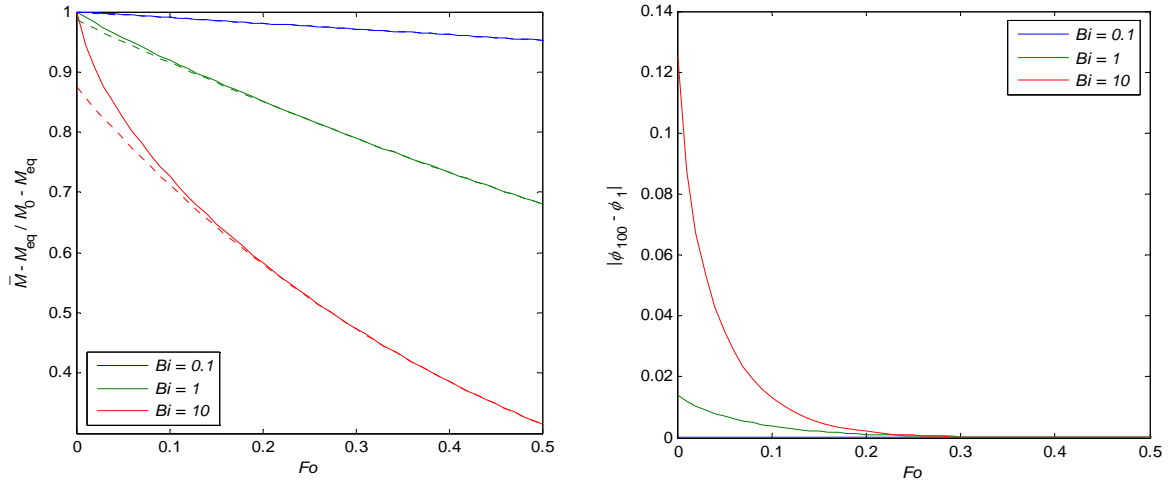


Figura 1. (Izquierda) Solución exacta (línea continua) y aproximada (línea discontinua) en función del número de Fourier para tres valores representativos del número de Biot. (Derecha) Error absoluto (Δ) de las soluciones aproximadas.

La obtención de μ_1 de la ecuación 11 requiere el empleo de algún método numérico de búsqueda de ceros de una función. Dado que el intervalo de búsqueda es conocido, $0 < \mu_1 < \pi/2$, no existe dificultad técnica en el cálculo. En este trabajo se ha empleado la función *fzero* de

Matlab, basada en el algoritmo descrito por Forsythe (Forsythe et al., 1976). Con esta raíz, la semianchura l y la pendiente b del ajuste, se calcula el coeficiente de difusión D según

$$b = \mu_1^2 \frac{D}{l^2}. \quad (12)$$

A partir de la raíz μ_1 se calcula también Bi de donde se obtendrá el coeficiente convectivo de transferencia de masa h_m conforme a

$$\mu_1 \tan \mu_1 = Bi = \frac{h_m l}{D}. \quad (13)$$

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para ilustrar el ajuste directo de los parámetros D y h_m se ha generado, partiendo de unos valores conocidos de D y h_m , un conjunto de datos de humedad promedio en función del tiempo $M_i = M(t_i)$ truncados a la centésima, de modo que simulen datos experimentales con un error absoluto $\delta = 0.01$, como se muestra en la tabla 1.

En principio, se deben desechar aquellos datos correspondientes a tiempos cortos para los cuales la aproximación a un término (ecuación 10) introduce un error Δ mayor (o igual) al error experimental δ . Como se mostró en la figura 1 (derecha), el error Δ depende de los números de Biot y Fourier, y éstos a su vez dependen del valor de los coeficientes D y h_m que se quiere calcular, de modo que se debe establecer un algoritmo iterativo autoconsistente que proporcione la mayor precisión posible en el ajuste de D y h_m considerando el error δ de los datos experimentales.

Tabla 1. Conjunto de datos de humedad frente al tiempo generados a partir de los valores de D , h_m , M_{eq} y l indicados, truncados a la centésima para simular datos experimentales con una precisión $\delta = 0.01$.

i	t_i (s)	\bar{M}_i (base seca)
0	0	1.32
1	3600	1.14
2	7200	1.04
3	10800	0.96
4	14400	0.89
5	18000	0.83
6	21600	0.78
$D = 4.76 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ $h_m = 2.74 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$ $M_{eq} = 0.2173$ (base seca) $l = 0.002 \text{ m}$ $Bi = h_m l / D = 11.5123$		

El procedimiento consiste en tomar inicialmente todos los datos experimentales ($i = 1-6$) y realizar el ajuste a la recta determinada por la ecuación 10, obteniendo un primer valor para los coeficientes D y h_m , de donde se podrá obtener a su vez un primer valor para el número de Biot del sistema y para los números de Fourier correspondientes a cada tiempo t_i . Ahora es posible calcular el error de la aproximación a un término Δ_i para cada dato experimental i , y verificar cuales introducen un error mayor (o igual) al error experimental. Se obtiene que los datos $i = 1, 2$ introducen dicho error, concretamente $\Delta_1 = 0.03$ y $\Delta_2 = 0.01$, de modo que se eliminan dichos datos y se repite el proceso realizando ahora el ajuste con los datos $i = 3-6$. Con este segundo ajuste se confirma que los dos primeros datos introducen error y se obtiene que además el tercer dato también introduce error ($\Delta_1 = 0.04$, $\Delta_2 = 0.01$ y $\Delta_3 = 0.01$), de modo que se elimina también este dato y se repite el ajuste ahora con los datos $i = 4-6$.

Tras este tercer ajuste se confirma que los tres primeros datos introducen error ($\Delta_1 = 0.04$, $\Delta_2 = 0.02$ y $\Delta_3 = 0.01$) y que el resto de datos, los empleados en este último ajuste, no introducen dicho error ($\Delta_i < 0.01$; $i = 4, 5, 6$) de manera que se ha llegado a la autoconsistencia.

En la figura 2 se muestran los ajustes correspondientes a los tres pasos indicados y además se ha añadido, con el objeto de dar una descripción más detallada, el paso innecesario en el que se realiza el ajuste con los datos $i = 2-6$. Conforme se eliminan los datos que introducen error, se puede observar la convergencia de los coeficientes D y h_m y del número de Biot Bi obtenidos en cada ajuste, hacia los valores exactos indicados en la tabla 1. La convergencia no puede ser mayor debido al error experimental δ . Obsérvese también como según se eliminan los datos que introducen error, es decir, que están sobre una zona de la curva donde la aproximación lineal a un término introduce un error mayor (o igual) al error experimental, el coeficiente de correlación lineal de Pearson tiende a -1.

Finalmente, habría que recalcar las condiciones experimentales en las que se deben realizar los ensayos de secado para aplicar este procedimiento adecuadamente. En primer lugar, las láminas del producto a secar deben poseer un grosor que sea mucho menor que las otras dos dimensiones espaciales, de manera que se puedan considerar láminas infinitas. Además, deberá ser producto fresco, de modo que la distribución espacial inicial de humedad sea constante. Si el producto posee partes estructuralmente diferenciadas, como corazón y parte externa, deberán realizarse ensayos separados con láminas correspondientes a cada parte que darán lugar, en principio, a coeficientes diferentes. Por otra parte, la temperatura y humedad del medio (aire en general) deben permanecer constantes a lo largo del proceso de secado. Si bien mantener la temperatura del medio constante, es relativamente sencillo de

conseguir, mantener la humedad del medio constante puede resultar mucho más complejo. Para mantener la validez del modelo analítico se debería cumplir, al menos, que la humedad del medio H_R cambie mucho más despacio que la humedad del producto M , es decir $\partial H_R / \partial t \ll \partial M / \partial t$.

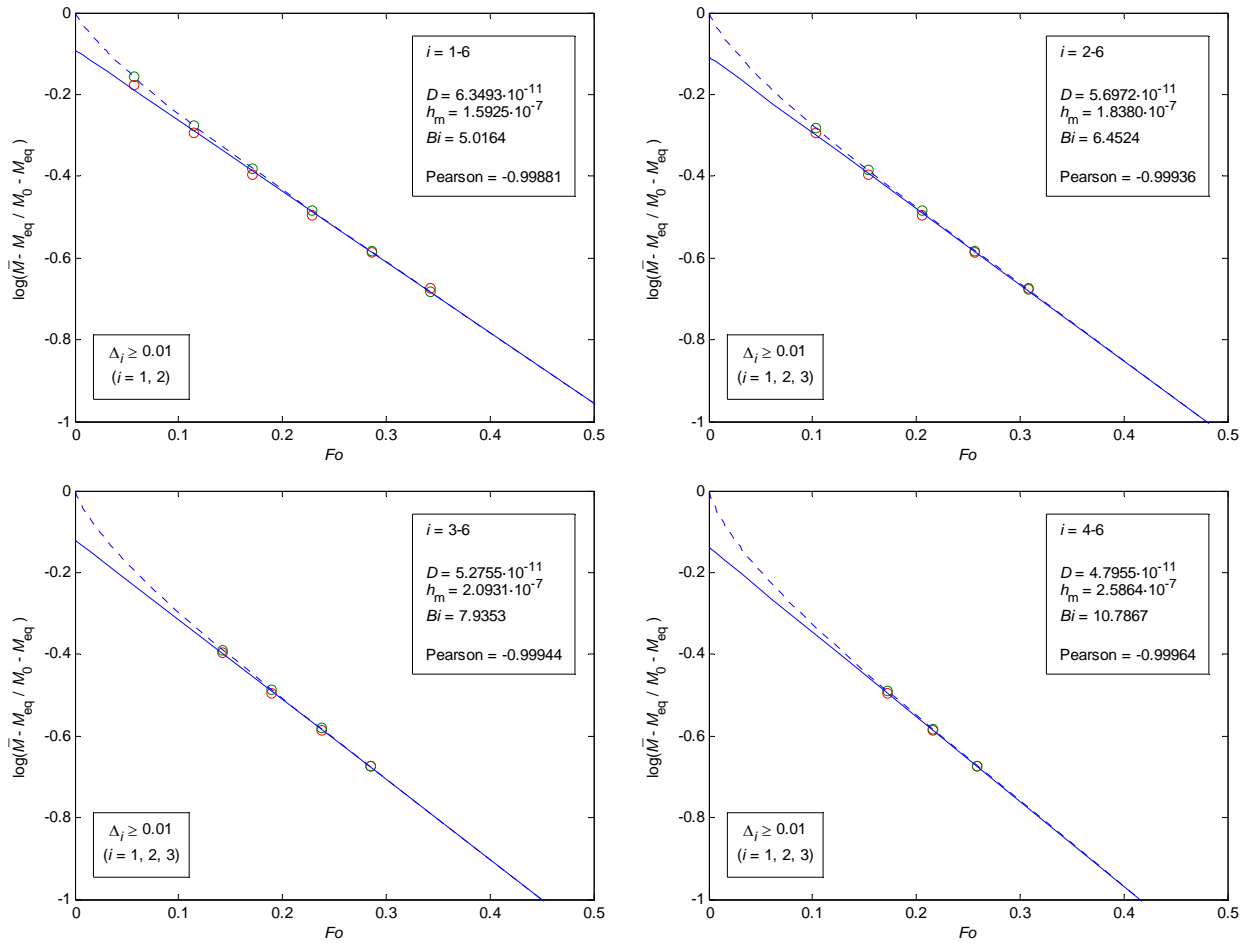


Figura 2. Representación de los datos generados (rojo), su ajuste a una recta (línea continua), la curva exacta correspondiente al ajuste (línea discontinua), y los valores correspondientes a los datos generados sobre la curva exacta (verde). En cada figura se indican los datos (i) empleados en cada ajuste, los valores obtenidos de D ($m^2 s^{-1}$), h_m ($m s^{-1}$) y Bi , así como el coeficiente de correlación lineal de Pearson. Se indican también los datos (i) para los cuales el error de la aproximación a un término Δ_i supera el error de los datos generados $\delta = 0.01$.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha establecido el procedimiento matemáticamente más adecuado para el cálculo directo de los coeficientes de difusión y de transferencia convectiva de masa realizando un ajuste por mínimos cuadrados a la aproximación lineal de la solución analítica (primer término de la serie infinita).

Frente a procedimientos obsoletos, que sin embargo se siguen empleando en la actualidad, basados en aproximaciones que fueron útiles cuando no se poseía capacidad computacional para el cálculo numérico de raíces de ecuaciones trascendentes, aquí se propone el cálculo directo de estas raíces empleando técnicas estándar del Análisis Numérico. Además, estas raíces están perfectamente acotadas, de manera su búsqueda numérica no presenta dificultad alguna.

Concretamente, las ecuaciones trascendentes a resolver numéricamente son: la ecuación 6, de donde se obtienen las raíces μ_n necesarias para calcular la solución exacta cuando se

conocen los coeficientes del sistema; y la ecuación 11, de donde se obtiene la raíz μ_1 en función de la ordenada en el origen del ajuste (el denominado “lag factor” en la literatura), necesaria en el cálculo de los coeficientes del sistema a partir de datos experimentales de secado.

Por último, se ha ilustrado el procedimiento iterativo necesario para el cálculo de los coeficientes del sistema mediante un conjunto de datos de secado, generados a partir de unos coeficientes conocidos y truncando estos datos para introducir un error experimental. Se ha mostrado como, al eliminar los datos que corresponden a un intervalo de tiempo donde la aproximación a un término introduce un error mayor que el error experimental, se obtiene una convergencia hacia los valores exactos, estando dicha convergencia limitada, como es de esperar, por el propio error experimental.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación del presente trabajo al MICINN a través del proyecto SMART-QC (GL2008-05267-C03-03) y a la Universidad Politécnica de Madrid.

6. BIBLIOGRAFIA

- Chen H.H., Hernandez C.E., Huang T.C. (2005) *A study of the drying effect on lemon slices using a closed-type solar dryer*. *Solar Energy* 78:97-103.
- Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. (1976) *Computer Methods for Mathematical Computations Prentice-Hall*.
- Luikov A.V. (1968) *Analytical Heat Diffusion Theory Academic Press*, New York and London.
- Pflug L.J., Blaisdell J.L. (1963) *Methods of analysis of precooling data*. *ASHRAE Journal* 5:33-40.
- Son J.D., Niu G., Yang B.S., Hwang D.H., Kang D.S. (2009) *Development of smart sensors system for machine fault diagnosis*. *Expert Systems with Applications* 36:11981-11991.
- Spencer Jr B.F., Ruiz-Sandoval M.E., Kurata N. (2004) *Smart sensing technology: opportunities and challenges*. *Structural Control and Health Monitoring* 11:349-368.
- Tripathy P.P., Kumar S. (2008) *Determination of temperature dependent drying parameters for potato cylinders and slices during solar drying*. *Energy Conversion and Management* 49:2941-2948.
- Tripathy P.P., Kumar S. (2009) *A methodology for determination of temperature dependent mass transfer coefficients from drying kinetics: Application to solar drying*. *Journal of Food Engineering* 90:212-218.